

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ 7/11/2014

- 1** Να βρείτε τα αναπτύγματα
α) $(x + 3)^2$ **β)** $(3\psi - 2)^2$ **γ)** $(\psi^2 + 3\psi)^2$ **δ)** $(4x - \sqrt{3})^2$

Λύση

Σύμφωνα με τις ταυτότητες $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ και $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- α)** $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$
β) $(3\psi - 2)^2 = (3\psi)^2 - 2 \cdot 3\psi \cdot 2 + 2^2 = 9\psi^2 - 12\psi + 4$
γ) $(\psi^2 + 3\psi)^2 = (\psi^2)^2 + 2\psi \cdot 3\psi + (3\psi)^2 = \psi^4 + 6\psi^2 + 9\psi^2 = \psi^4 + 15\psi^2$
δ) $(4x - \sqrt{3})^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 16x^2 - 8x + 3$

- 2** Αν η παρακάτω ισότητα είναι ταυτότητα
 $(a - b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a + b) = a^8 - b^8.$

Να εξετάσετε αν ισχύει για $\beta = \frac{1}{2007}$ και $\alpha = 2007$

Λύση

Επειδή η ισότητα: $(a - b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a + b) = a^8 - b^8$ είναι ταυτότητα θα ισχύει για κάθε τιμή των α, β άρα θα ισχύει για $\alpha = 2007$ και $\beta = \frac{1}{2007}$

- 5** Να γίνουν οι πράξεις

α) $(3\alpha - \beta)^2 - 3(4\alpha + 5)(4\alpha - 5)$ **β)** $(3x - \psi)(3x + \psi) - (x - \psi)(x^2 + x\psi + \psi^2)$

Λύση

α) $(3\alpha - \beta)^2 - 3(4\alpha + 5)(4\alpha - 5) = (3\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha \cdot \beta + \beta^2 - [(4\alpha)^2 - 5^2] = 9\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2 - 16\alpha^2 + 25 = 7\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2 + 25$
β) $(3x - \psi)(3x + \psi) - (x - \psi)(x^2 + x\psi + \psi^2) = (3x)^2 - \psi^2 - (x^3 - \psi^3) = 9x^2 - \psi^2 - x^3 + \psi^3$

- 6** Να αποδείξετε ότι:

α) $(a + \beta)^2 - (a - \beta)^2 = 4a\beta$

β) $(2007 + \frac{1}{2007})^2 - (2007 - \frac{1}{2007})^2 = 4$

γ) $(3\kappa + 2)^2 - (2\kappa + 3)^2 = 5 \cdot (\kappa - 1)(\kappa + 1).$

Λύση

α) $(a + \beta)^2 - (a - \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2 - (a^2 - 2a\beta + \beta^2) = a^2 + 2a\beta + \beta^2 + 2a\beta - \beta^2 = 4a\beta$

β) Από α) Αν βάλουμε όπου $\alpha = 2007$ και $\beta = \frac{1}{2007}$ τότε

$$(2007 + \frac{1}{2007})^2 - (2007 - \frac{1}{2007})^2 = 4 \cdot 2007 \cdot \frac{1}{2007} = 4.$$

γ) $(3\kappa + 2)^2 - (2\kappa + 3)^2 = [3\kappa + 2 - (2\kappa + 3)][3\kappa + 2 + (2\kappa + 3)] = (3\kappa + 2 - 2\kappa - 3)(3\kappa + 2 + 2\kappa + 3)(\kappa - 1)(5\kappa + 5) = 5(\kappa - 1)(\kappa + 1)$